分组拆分法·Splitting the Summation

> ✎ **Idea**
>
> 此类方法的核心思想是将级数 $\sum a_n$ 的下标集 I 划分为两个或多个子集，每个子级数在其定义的集合上更容易找到一个收敛的上界。
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n\in M} a_n + \sum_{n\in M^c} a_n.$$
>
> 这适用于 a_n 的放缩难以用一个统一的数列控制的情况。

- 1. 确定分组标准 (The Criterion)
     找到一个判别条件 $P(n)$，将所有下标 划分为两个互斥的集合 M 和 M^c.这个条件通常针对 a_n 中放缩困难的关键因子。其中$M = \{n \mid P(n)\ 成立\}$,
     $M^c = \{n \mid P(n)\ 不成立\}$.

这里的核心是要求 $P(n)$ 必须使得 M 和 M^c 上的项 a_n 都可以被更简单的收敛数列控制。

- 2. 分别放缩求和 (The Bounding)
     证明这两个（可以多个，但常用两个）子级数都收敛：
     对于 M，利用 $P(n)$ 成立的条件，找到一个收敛的上

界：

$$\sum_{n\in M} a_n \le \sum_{n\in M} b_n < \infty$$

对于 M^c，利用 $P(n)$ 不成立的条件，找到一个收敛的上界：

$$\sum_{n\in M^c} a_n \le \sum_{n\in M^c} c_n < \infty$$

只要 $\sum_{n\in M} a_n$ 和 $\sum_{n\in M^c} a_n$ 都收敛，原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 就收敛。

常见的判断条件

判别条件 $P(n)$ 往往与项 a_n 中**递增/递减**的因子有关，例如：

- **相邻项的比值控制：** $|a_{n+1}/a_n|$ 超过某个阈值。
- **项的大小：** *an* 是否小于某个简单函数(通常用于**截尾法**)·

下面给出两个应用供读者参考理解。

柯西收敛判别法的推广应用

想要证明递减级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性。

下面给出此类问题的**较为标准**的思路。

将级数项按指数增长的区间 $[2^k, 2^{k+1}-1]$ 进行分组，利用 a_n 的

递减性，以上级数可以重写为：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n \right).$$

对于第 k 组的求和 $\Sigma_k = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n$：组内有 2^k 项，由于 a_n 递减，组内所有项 $a_n \leq a_{2^k}$. 因此 Σ_k 的上界为：

$$\Sigma_k \leq \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_{2^k} = 2^k \cdot a_{2^k}.$$

此时，原级数的收敛性等价于新的分组级数的收敛性：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \iff \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} \text{ 收敛}.$$

处理带有根号和指数项的级数

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \cdot e^{\sqrt{n}}}$ 的收敛性。

同上述处理类似，我们将下标 n 按照 $\sqrt{n}$ 的整数部分 k 进行分组，利用 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 的特性，将 $\sqrt{n}$ 转化为 k. 定义分组集合 $M_k = \{n \mid k^2 \leq n < (k+1)^2\}$，即 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k$.

故原级数可以重写为 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n \in M_k} \frac{1}{\sqrt{n} e^{\sqrt{n}}} \right)$.

对于第 k 组的求和 $\Sigma_k' = \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{n} e^{\sqrt{n}}}$：

1. 组内项数是 $2k+1$ 个，
2. 对于组内所有 n，$\sqrt{n} \geq k$.
   很自然的，我们利用 $\sqrt{n} \geq k$ 进行放缩得到

$$\Sigma_k' \leq \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{k\cdot e^k}.$$

因为组内各项的上界相同，Σ_k' 的上界为：

$$\Sigma_k' \leq (2k+1)\cdot \frac{1}{ke^k}.$$

现在判断新的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \Sigma_k'$ 的收敛性，利用比较判别法：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Sigma_k' \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{ke^k},$$

当 $k\to\infty$ 时，$\frac{2k+1}{ke^k} \sim \frac{2}{e^k}\cdot$ 由于 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{e^k}$ 是一个公比 $q=1/e<1$ 的几何级数，收敛。 根据比较判别法，原级数收敛。

西元二零二五年十月

提笔于中国南京江宁区东南大学九龙湖校区 斋内